УДК 514.7
DOI 10.21685/2072-3040-2017-4-3

А. В. Багаев, Н. И. Жукова

ТРАНСВЕРСАЛЬНО АНАЛИТИЧЕСКИЕ ЛОРЕНЦЕВЫ СЛОЕНИЯ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Лоренцева геометрия коренным образом отличается от римановой геометрии и находит широкое применение в различных физических теориях. Целью данной работы является исследование структуры трансверсально аналитических лоренцевых слоений (M, F) коразмерности два на n-мерных многообразиях.

Материалы и методы. Применяются методы слоеных расслоений и псевдогрупп голономии.

Результаты. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы лоренцево слоение коразмерности два, допускающее связность Эресмана, было римановым. Дано описание структуры неримановых трансверсально аналитических лоренцевых слоений коразмерности два со связностью Эресмана.

Выводы. Любое трансверсально аналитическое лоренцево слоение коразмерности два со связностью Эресмана является либо римановым и имеет структуру одного из следующих типов: 1) все слои замкнуты, а пространство слоев – гладкий орбифолд; 2) замыкание слоев образует риманово слоение, каждый слой которого – минимальное множество; 3) каждый слой всюду плотен; либо имеет постоянную трансверсальную гауссову кривизну и накрыто тривиальным расслоением $L_0 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, где L_0 – многообразие, диффеоморфное любому слою без голономии.

Ключевые слова: лоренцевы слоения, связность Эресмана, ростковая группа голономии слоя.

A. V. Bagaev, N. I. Zhukova

TRANSVERSELY ANALYTICAL LORENTZIAN FOLIATIONS OF CODIMENSION TWO

Abstract.

Background. The Lorentzian geometry is radically different from the Riemannian geometry and finds widespread application in various physical theories. The goal of this work is to investigate the structure of transversely analytical Lorentzian foliations (M, F) of codimension two on n-dimensional manifolds.

Methods. The methods of foliated bundles and holonomy pseudogroups are applied.

Results. We prove a criterion for Lorentzian foliations of codimension two with Ehresmann connection to be Riemannian. A description of the structure of transversely analytical non-Riemannian Lorentzian foliations of codimension two is given.

Conclusions. Any transversely analytical Lorentzian foliation of codimension two with an Ehresmann connection is either a Riemannian and has the structure of

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00312-а) и Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект № 90) в 2017.

one of the following types: 1) all leaves are closed and the leaf space is a smooth orbifold; 2) closures of leaves form a Riemannian foliation of codimension one, each leaf of which is a minimal set; 3) each leaf is dense everywhere; or its transversely Gaussian curvature is constant and it is covered by the trivial fibration $L_0 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, where L_0 is a manifold diffeomorphic to any leaf without holonomy.

Key words: Lorentzian foliation, Ehresmann connection, germ holonomy group of a leaf.

Введение

Исследуются лоренцевы слоения. Напомним, что слоение (M,F), заданное N-коциклом $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}_{i,j\in J}$, называется лоренцевым, если на многообразии N (возможно несвязном) задана лоренцева метрика g^N и все преобразования трансверсальных координат γ_{ij} являются локальными изометриями лоренцева многообразия (N, g^N).

В работе [1] дано описание трансверсально полных лоренцевых слоений коразмерности два на замкнутых трехмерных многообразиях. Нами исследуется структура трансверсально аналитических лоренцевых слоений коразмерности два на n-мерных многообразиях. В отличие от [1], мы не предполагаем компактности слоеного многообразия и не накладываем ограничений на размерность слоев. Требование трасверсальной полноты заменено более слабым условием существования связности Эресмана для слоения (M,F).

Понятие связности Эресмана для слоения введено в [2] как естественное обобщение связности в расслоении. По определению, связность Эресмана для слоения (M,F) коразмерности q есть такое q-мерное распределение $\mathbf{Q}$, трансверсальное слоению, для интегральных кривых которого определен перенос вдоль кривых в слоях.

В настоящее время римановы слоения образуют наиболее глубоко изученный класс среди слоений с трансверсальными геометрическими структурами. Напомним, что слоение, все слои которого компактны, называется компактным. Р. А. Волак [3] доказал, что любое полное компактное G-слоение конечного типа является римановым. В работе [4] им получен аналогичный результат для полных компактных слоений, допускающих трансверсальную систему дифференциальных уравнений произвольного порядка. Этот результат распространен на полные компактные картановы слоения [5].

В работе [6] получен критерий римановости конформных слоений, утверждающий, что полное конформное слоение коразмерности q, где $q \geq 3$, является римановым тогда и только тогда, когда все его группы голономии относительно компактны. Этот результат обобщен на слоения с трансверсальной параболической геометрией ранга один [7]. В работе [8, теорема 5] доказано, что любое картаново слоение типа $\boldsymbol{g}/\boldsymbol{h}$, где подалгебра Ли $\boldsymbol{h}$ компактно вложена в алгебру Ли $\boldsymbol{g}$, является римановым слоением.

Под группой голономии $\Gamma(L,x)$ слоя L мы понимаем ростковую группу голономии, общепринятую в теории слоений [9]. Слой с тривиальной группой голономии называется слоем без голономии. Если все слои слоения (M,F) без голономии, то (M,F) называется слоением без голономии.

Нами доказан следующий критерий.

Теорема 1. Лоренцево слоение (M,F) коразмерности два на n-мерном многообразии, допускающее связность Эресмана, является римановым тогда и только тогда, когда группа голономии каждого его слоя конечна и либо тривиальна, либо изоморфна $\mathbf{Z}_2$ или $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.

Пусть (M,F) – произвольное слоение. Подмножество многообразия M называется насыщенным, если его можно представить как объединение каких-либо слоев этого слоения.

Слой $L = L(x)$ слоения (M,F) коразмерности q называется *локально стабильным в смысле Эресмана и Риба*, если существует такое семейство насыщенных открытых множеств W_β, $\beta \in J$, содержащих L, что:

1) существует локально тривиальное расслоение $f_\beta : W_\beta \to L$, $\beta \in J$, слои которого диффеоморфны q-мерному диску D^q и трансверсальны слоям слоения (W_β, F_{W_β});

2) для $\gamma \in J$ следы окрестностей W_β образуют базу топологии слоя $f_\gamma^{-1}(x)$ расслоения $f_\gamma : W_\gamma \to L$ в точке $x \in L$.

Применяя методы из [10], основанные на свойствах связности Эресмана для римановых слоений, мы доказали следующую структурную теорему.

Теорема 2. Если лоренцево слоение (M,F) коразмерности два на n-мерном многообразии, допускающее связность Эресмана, является римановым, то реализуется одна из следующих трех возможностей:

1) все слои слоения замкнуты, локально стабильны, а пространство слоев является гладким двумерным орбифолдом, нетривиальные группы орбифолдности которого изоморфны $\mathbf{Z}_2$ или $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$;

2) замыкания слоев слоения (M,F) образуют риманово слоение $(M,\overline{F})$ коразмерности один, причем каждый слой слоения $(M,\overline{F})$ является минимальным множеством исходного слоения;

3) каждый слой слоения (M,F) всюду плотен в M.

Слоение (M,F), заданное N-коциклом $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}_{i,j \in J}$, называется *трансверсально аналитическим*, если N – вещественное аналитическое многообразие, и все преобразования трансверсальных координат γ_{ij}, $i,j \in J$, – аналитические отображения. В случае, когда N – однородное пространство G/H, а γ_{ij} – ограничения на открытые подмножества сдвигов пространства G/H элементами группы Ли G, то (M,F) называется *трансверсально однородным слоением* или $(G, G/H)$*-слоением* [11].

Следующая теорема доказана без предположения о существовании связности Эресмана для слоения (M,F).

Теорема 3. Пусть (M,F) – трансверсально аналитическое лоренцево слоение коразмерности два, не являющееся римановым. Тогда его трансверсальная гауссова кривизна постоянна и равна K_0, а (M,F) является трансверсально однородным $(G, G/H)$-слоением, причем:

1) если $K_0 = 0$, то G – группа всех изометрий псевдоевклидовой плоскости, $H \cong O(1,1)$ – псевдоортогональная группа квадратных матриц второго порядка;

2) если $K_0 \neq 0$, то $G \cong O(1,2)$, $H \cong O(1,1)$.

Нами доказана следующая структурная теорема.

Теорема 4. Пусть (M,F) – трансверсально аналитическое нериманово лоренцево слоение коразмерности два со связностью Эресмана Q. Тогда:

1) существует регулярное накрывающее отображение $k:\tilde{M} \to M$, где $\tilde{M} = L_0 \times B$, B – лоренцево многообразие постоянной гауссовой кривизны, диффеоморфное плоскости $\mathbf{R}^2$, L_0 – многообразие, диффеоморфное любому слою без голономии, а индуцированное слоение $\tilde{F} = k^* F = \{L_0 \times \{z\} \mid z \in B\}$ тривиально и образовано слоями проекции $s:\tilde{M} = L_0 \times B \to B$;

2) существует гомоморфизм $\chi:\pi_1(M) \to Iso(B)$ фундаментальной группы $\pi_1(M)$ в группу изометрий $Iso(B)$ лоренцева многообразия B, причем группа $\Psi := \chi(\pi_1(M))$ изоморфна группе накрывающих преобразований регулярного накрытия $k:\tilde{M} \to M$;

3) группа голономии $\Gamma(L,x)$, $x \in M$, произвольного слоя $L = L(x)$ слоения (M,F) изоморфна как стационарной подгруппе Ψ_b группы Ψ в точке $b \in s(k^{-1}(x)) \subset B$, так и группе Q-голономии $H_Q(L,x)$ этого слоя.

Группа Ψ, удовлетворяющая теореме 4, называется *глобальной группой голономии* слоения (M,F).

1. Доказательство теоремы 1

Нетрудно доказать следующее утверждение без предположения о существовании связности Эресмана для слоения (M,F).

Лемма 1. Пусть (M,F) – лоренцево слоение коразмерности два. Если слоение (M,F) риманово, то группа голономии каждого его слоя конечна и либо тривиальна, либо изоморфна $\mathbf{Z}_2$ или $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.

Из леммы 1 вытекает утверждение теоремы 1 в предположении римановости слоения (M,F).

Предположим обратное: пусть все группы голономии лоренцева слоения (M,F) коразмерности два конечны. Покажем, что слоение (M,F) риманово.

Расслоение трансверсальных реперов представляет собой главное расслоение $\pi:\mathbf{R} \to M$ со структурной группой $H = O(1,1)$ и H-инваринтным слоением $(\mathbf{R},\mathbf{F})$, обладающее некоторыми дополнительными свойствами [8]. Оно называется слоеным H-расслоением, а $(\mathbf{R},\mathbf{F})$ – поднятым слоением. Компонента единицы $O_e(1,1)$ группы $O(1,1)$ свободно действует на $\mathbf{R}$, следовательно, фактор-пространство $\tilde{M} = \mathbf{R}/O_e(1,1)$ является гладким многообразием. На $\tilde{M}$ определено гладкое действие группы $\Psi = O(1,1)/O_e(1,1) \cong$ $\cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, причем пространство орбит $\tilde{M}/\Psi$ совпадает с M и имеет место равенство $\pi = r \circ q$, где $q:\mathbf{R} \to \tilde{M}$, $r:\tilde{M} \to M$ – фактор-отображения. Проекция $r:\tilde{M} \to M$ является регулярным накрытием с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе $\Psi \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$. Слоение F на M посредством накрытия $r:\tilde{M} \to M$ определяет слоение $\tilde{F}$ на многообразии $\tilde{M}$. Обозначим $\tilde{F}$ через r^*F.

Как известно, группа $O(1,1)$ имеет четыре компоненты связности, следовательно, $\tilde{M} = \mathbf{R}/O_e(1,1)$ как и $\mathbf{R}$ может иметь 1, 2 или 4 компоненты связности. В случае, когда многообразие $\mathbf{R}$ несвязно, будем рассматривать одну его компоненту связности и обозначать ее через $\mathbf{R}_0$, положим $\tilde{M}_0 = q(\mathbf{R}_0)$, $\tilde{F}_0 = \tilde{F}\big|_{\tilde{M}_0}$. Обозначим через π_0, q_0, r_0 сужения отображений π, q, r на выбранные компоненты связности.

Заметим, что $q_0:\mathbf{R}_0 \to \tilde{M}_0$ – слоеное $O_e(1,1)$-расслоение для слоения $(\tilde{M}_0, \tilde{F}_0)$, следовательно, $(\tilde{M}_0, \tilde{F}_0)$ является лоренцевым слоением коразмерности два. Как известно, для любого слоя $\mathbf{L} \in \mathbf{F}$ сужение $q_0\big|_{\mathbf{L}}:\mathbf{L} \to \tilde{L} = q_0(\mathbf{L})$ – регулярное накрытие с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе голономии слоя $\tilde{L}$. Поскольку все группы голономии слоения (M,F) конечны, а группа $O_e(1,1)$ не имеет нетривиальных конечных подгрупп, то сужение $q_0\big|_{\mathbf{L}}$ является диффеоморфизмом слоя $\mathbf{L}$ на слой $\tilde{L}$. Следовательно, все группы голономии слоения $(\tilde{M}_0, \tilde{F}_0)$ тривиальны.

Нетрудно видеть, что слоение (M,F) является римановым тогда и только тогда, когда слоение $(\tilde{M}_0, \tilde{F}_0)$ римановo. Таким образом, при доказательстве римановости слоения (M,F), не нарушая общности, можно считать, что (M,F) – слоение без голономии. Будем обозначать через $\pi:\mathbf{R} \to M$ проекцию слоеного H-расслоения, где $H = O_e(1,1)$. Так как $\pi\big|_{\mathbf{L}}:\mathbf{L} \to L$ – диффеоморфизм произвольного слоя $\mathbf{L}$ поднятого слоения $(\mathbf{R},\mathbf{F})$, то согласно [6, предложение 4] существует такое сечение $\sigma: M \to \mathbf{R}$ расслоения $\pi:\mathbf{R} \to M$, что $\hat{M} = \sigma(M)$ есть $\mathbf{F}$-насыщенное подмногообразие в $\mathbf{R}$. Поскольку главное H-расслоение $\mathbf{R}(M,H)$ имеет сечение, то оно тривиально, т.е. $\mathbf{R} = M \times H$ и действие R_a элемента $a \in H$ на $\mathbf{R}$ определено равенством $R_a(x,b) = (x,ba)$ $\forall (x,b) \in M \times H$. Заметим, что $\hat{M} = \sigma(M) \cong M \times \{e\}$ – замкнутое вложенное помногообразие в $\mathbf{R}$.

Обозначим через $\mathbf{Q}$ связность Эресмана для слоения (M,F). Тогда $\tilde{\mathbf{Q}} = \pi^*\mathbf{Q}$ – индуцированная связность Эресмана для $(\mathbf{R},\mathbf{F})$. Из работы [12, глава 2] известно, что замыкания слоев e-слоения $(\mathbf{R},\mathbf{F})$ образуют новое слоение $(\mathbf{R},\overline{\mathbf{F}})$ со связностью Эресмана.

Для любой точки $u \in \hat{M}$ обозначим через $\mathbf{L} = \mathbf{L}(u)$ слой слоения $(\hat{M}, \hat{F})$, проходящий через u, где $\hat{F} = \mathbf{F}|_{\hat{M}}$. Обозначим через $\bar{\mathbf{L}}$ замыкание слоя $\mathbf{L}$ в $\mathbf{R}$. Поскольку $\hat{M}$ – замкнутое подмножество в $\mathbf{R}$, то $\bar{\mathbf{L}} \subset \hat{M}$. Таким образом, согласно сказанному выше, замыкания слоев слоения $(\hat{M}, \hat{F})$ образуют новое слоение $(\hat{M}, \bar{F})$, слои которого являются слоями локально тривиального расслоения $\hat{\pi}_b : \hat{M} \to \hat{W}$ [12, глава 2]. При этом $(\hat{M}, \bar{F}) = (\hat{M}, \hat{F})$ тогда и только тогда, когда все слои слоения (M, F) замкнуты. В произвольной точке $z \in \hat{W}$ существует окрестность U и диффеоморфизм $f_U : \hat{\pi}_b^{-1}(U) \to U \times \bar{\mathbf{L}}$. Заметим, что $(\bar{\mathbf{L}}, \mathbf{F}|_{\bar{\mathbf{L}}})$ – слоение Ли с всюду плотными слоями. Оно является (G_0, G_0)-слоением, где G_0 – односвязная группа Ли, алгебра Ли которой является структурной алгеброй слоения Ли $(\bar{\mathbf{L}}, \mathbf{F}|_{\bar{\mathbf{L}}})$. Подчеркнем, что $G_0 = \{e\}$ тогда и только тогда, когда $(\hat{M}, \bar{F}) = (\hat{M}, \hat{F})$. Так как $\tilde{\mathbf{Q}}|_{\bar{\mathbf{L}}}$ – связность Эресмана для этого слоения, то согласно [6] оно накрыто локально тривиальным расслоением с базой G_0. Следовательно, на $\bar{\mathbf{L}}$ существует трансверсально проектируемая риманова метрика d. Зафиксируем риманову метрику $\hat{g}$ на $\hat{W}$. Тогда на $U \times \bar{\mathbf{L}}$ определена метрика $\hat{g}|_U \oplus d$. Диффеоморфизм $f_U : \hat{\pi}_b^{-1}(U) \to U \times \bar{\mathbf{L}}$ определяет риманову метрику $\hat{h} = f_U^*(\hat{g}|_U \oplus d)$ на $\hat{\pi}_b^{-1}(U)$. Подчеркнем, что риманова метрика $\hat{h}$ на $\hat{\pi}_b^{-1}(U)$ является трансверсально проектируемой относительно слоения $(\hat{\pi}_b^{-1}(U), \mathbf{F}|_{\hat{\pi}_b^{-1}(U)})$.

Пусть $\Xi = \{U_i \,|\, i \in \mathbf{J}\}$ – открытое покрытие $\hat{W}$ стягиваемыми окрестностями, в которых расслоение $\hat{\pi}_b : \hat{M} \to \hat{W}$ тривиализуемо и $\hat{h}_i$ – риманова метрика на $\tilde{U}_i = \hat{\pi}_b^{-1}(U_i)$, определенная указанным выше образом, являющаяся трансверсально проектируемой относительно слоения $(\tilde{U}_i, \mathbf{F}|_{\tilde{U}_i})$. Обозначим через $\{\theta_i \,|\, i \in \mathbf{J}\}$ разбиение единицы на $\hat{W}$, подчиненное покрытию Ξ. Пусть $\hat{\theta}_i = \hat{\pi}_b^{-1}\theta_i$. Нетрудно проверить, что $\hat{\theta}_i|_{\bar{\mathbf{L}}} = \mathrm{const} \quad \forall \mathbf{L} \in \mathbf{F}$. Тогда $g = \sum_{i \in \mathbf{J}} \hat{\theta}_i \hat{h}_i$ – риманова метрика на $\hat{M}$, трансверсально проектируемая относительно слоения $(\hat{M}, \hat{F})$. Таким образом, слоение $(\hat{M}, \hat{F})$ – риманово.

Так как $\pi|_{\hat{M}} : \hat{M} \to M$ – изоморфизм слоений $(\hat{M}, \hat{F})$ и (M, F), то (M, F) также риманово слоение. □

2. Доказательство теоремы 2

Предположим, что лоренцево слоение (M, F) коразмерности два на n-мерном многообразии M является римановым.

Случай 1: существует слой L, всюду плотный в M. Согласно [6, теорема 1] замыкание каждого слоя риманова слоения (M,F) со связностью Эресмана образует минимальное множество, следовательно, любой слой L этого слоения всюду плотен в M.

Случай 2: существует замкнутый слой L. Согласно теореме 1 группа голономии $\Gamma(L,x)$ конечна. Так как (M,F) – риманово слоение со связностью Эресмана, то аналогично [10, теорема 2] мы доказываем, что существование замкнутого слоя с конечной группой голономии влечет замкнутость всех слоев этого слоения, при этом группы голономии всех слоев конечны, а пространство слоев M/F является гладким двумерным орбифолдом.

Случай 3: существует незамкнутый слой L, замыкание которого не совпадает с M. По свойству риманова слоения со связностью Эресмана, указанному выше, замыкание слоев слоения (M,F) образует новое риманово слоение $(M,\overline{F})$ со связностью Эресмана, вообще говоря, с особенностями. В рассматриваемом случае слои слоения $(M,\overline{F})$ отличны от M и от слоев (M,F), поэтому $(M,\overline{F})$ – риманово слоение (без особенностей) коразмерности один, и замыкание $\overline{L}$ каждого слоя L – минимальное множество для (M,F). □

3. Доказательство теоремы 3

Пусть лоренцево слоение (M,F) коразмерности два задано N-коциклом $\xi=\{U_i,f_i,\gamma_{ij}\}_{i,j\in J}$, где (N,g^N) – двумерное, вообще говоря, несвязное лоренцево многообразие. Обозначим через $K=K(y)$, $y\in N$, гауссову кривизну лоренцева многообразия (N,g^N). Для любой точки $x\in M$ существует такая субмерсия $f_i:U_i\to V_i$ из N-коцикла ξ, что $x\in U_i$. Определим функцию $\mathbf{K}:M\to\mathbf{R}$, полагая

$$\mathbf{K}(x)=K(f_i(x)). \tag{1}$$

Если $x\in U_i\cap U_j$, то $K(f_j(x))=K(\gamma_{ji}\circ f_i(x))=\gamma_{ji}^{*}K(f_i(x))=K(f_i(x)),$ поскольку γ_{ji} – локальная изометрия лоренцева многообразия (N,g^N), удовлетворяющая равенству $\gamma_{ji}\circ f_i=f_j$ на пересечении $U_i\cap U_j$. Таким образом, функция $\mathbf{K}:M\to\mathbf{R}$ определена корректно и является гладкой. Функция $\mathbf{K}:M\to\mathbf{R}$, определенная равенством (1), называется *трансверсальной гауссовой кривизной* лоренцева слоения (M,F). Из этого определения вытекает, что $\mathbf{K}=\mathbf{K}(x)$ – базисная функция, т.е. постоянная на слоях слоения (M,F).

Пусть (M,F) – нериманово трансверсально аналитическое лоренцево слоение коразмерности два, заданное N-коциклом $\xi=\{U_i,f_i,\gamma_{ij}\}_{i,j\in J}$. Поскольку (M,F) – нериманово, то согласно теореме 1 существует слой L с бесконечной группой голономии $\Gamma(L,x)$. Найдется такая субмерсия

$f_i : U_i \to V_i = f_i(U_i)$ из N-коцикла, что $x \in U_i$. Пусть $v = f_i(x) \in V_i$. Заметим, что группа голономии $\Gamma(L, x)$ изоморфна бесконечной подгруппе псевдоортогональной группы $O(1,1)$, содержащей элемент

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \in O_e(1,1), \tag{2}$$

где $O_e(1,1)$ – компонента единицы группы $O(1,1)$; t – некоторое фиксированное число, отличное от нуля. Собственными значениями матрицы $\mathbf{A}$ являются $\lambda_1 = e^{-t}$, $\lambda_2 = e^t$. Не нарушая общности, будем считать, что $t > 0$, в противном случае рассмотрим $\mathbf{A}^{-1}$. Напомним, что локальные изометрии γ_{ij} из N-коцикла ξ порождают псевдогруппу изометрий лоренцева многообразия (N, g^N), которая называется псевдогруппой голономии слоения (M, F) и обозначается через $\mathbf{H} = \mathbf{H}(M, F)$. Предположим, что локальная изометрия $\varphi \in \mathbf{H}$, для которой $\varphi(v) = v$ и $\varphi_{*v} = \mathbf{A}$, определена в нормальной окрестности V точки v, а экспоненциальное отображение Exp_v определено в такой окрестности W нуля касательного векторного пространства T_vN в $v \in N$, что $Exp_v(W) = V$. Пусть $X \in W$ – собственный вектор, соответствующий λ_1. Обозначим $v_0 = Exp_v(X)$. Поскольку φ – локальная изометрия, то

$$Exp_v \circ \varphi_{*v} = \varphi \circ Exp_v. \tag{3}$$

Так как $\lambda_1 = e^{-t} \in (0,1)$, то $\lambda_1^n X \in W \ \forall n \in \mathbf{N}$. Подчеркнем, что $\varphi_{*v}^n = \mathbf{A}^n$. Следовательно, $v_n := Exp_v(\lambda_1^n X) \in V$; в силу (3) и свойства локальной изометрии φ^n имеет место цепочка равенств:

$$v_n = Exp_v(\lambda_1^n X) = Exp_v(\mathbf{A}^n X) = \varphi^n \circ Exp_v(X) = \varphi^n(v_0) \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Поскольку функция гауссовой кривизны K лоренцева многообразия (N, g^N) инвариантна относительно локальных изометрий, то $K(v_n) = K(\varphi^n(v_0)) = K(v_0)$. С другой стороны, условие $0 < \lambda_1 < 1$ и непрерывность экспоненты влекут $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = Exp_v\left(\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_1^n X\right) = Exp_v(0) = v$. В силу непрерывности K имеем $K_0 = K(v) = K(v_n) = K(v_0)$. Так как слоение (M, F) – трансверсально аналитическое, то гауссова кривизна является вещественной аналитической функцией. Следовательно, $K(z) = K_0 \quad \forall z \in V$. Более того, $K(z) = K_0$ на всей связной компоненте N, содержащей v. Отсюда вытекает, что слой L имеет открытую насыщенную окрестность, в которой трансверсальная гауссова кривизна $\mathbf{K}$ постоянна и равна K_0.

Соединим любую точку $\tilde{x} \in M$ с x гладкой кривой $h : [0,1] \to M$, $h(0) = x$, $h(1) = \tilde{x}$. Покроем $h([0,1])$ конечной цепочкой окрестностей U_1,

U_2, …, U_m из N-коцикла ξ. Поскольку $U_s \cap U_{s+1} \neq \varnothing \quad \forall s \in \{1,\ldots,m-1\}$ и функции перехода $\gamma_{s+1,s} : f_s(U_s \cap U_{s+1}) \to f_{s+1}(U_s \cap U_{s+1})$ – локальные изометрии лоренцева многообразия (N, g^N), то $\left(\gamma_{s+1,s}\right)^* \left(K\big|_{f_{s+1}(U_s \cap U_{s+1})}\right) = K\big|_{f_s(U_s \cap U_{s+1})}$. Откуда, учитывая, что $K(z)$ – вещественная аналитическая функция на N, следует $\mathbf{K}\ (x) = \ \mathbf{K}\ (\tilde{x}) = K_0$. Таким образом, трансверсальная гауссова кривизна $\mathbf{K}$ на M постоянна и равна K_0.

Итак, (N, g^N) – двумерное лоренцево многообразие постоянной гауссовой кривизны K_0. Поэтому локально N представляет собой редуктивное однородное пространство с канонической связностью второго рода [13]. Следовательно, можно считать, что $V_i = f_i(U_i) \ \ \forall i \in J$ есть открытое подмножество в односвязном редуктивном однородном пространстве G_i / H_i. Редуктивное однородное пространство является вещественно-аналитическим многообразием, а каноническая связность второго рода – полной аналитической связностью. Так как функции перехода $\gamma_{ji} : f_i(U_i \cap U_j) \to f_j(U_i \cap U_j)$ являются изометриями, и, следовательно, аффинными диффеоморфизмами между открытыми подмножествами в G_i / H_i и G_j / H_j, то γ_{ji} могут быть продолжены до аффинного диффеоморфизма между G_i / H_i и G_j / H_j. Положим $G = G_i$, $H = H_i$, $N = G / H$. Как известно, полной группой аффинных диффеоморфизмов однородного пространства G / H является группа G, действующая транзитивно на G / H левыми сдвигами. Таким образом, можно считать, что $f_i(U_i)$ – открытое подмножество в односвязном редуктивном однородном пространстве G / H, а функции перехода γ_{ji} – ограничения на открытые подмножества сдвигов пространства G / H элементами группы Ли G при $i, j \in J$. Следовательно, (M, F) может рассматриваться как трансверсально однородное $\left(G, G / H\right)$-слоение.

Заметим, что при $K_0 \neq 0$ в качестве однородного пространства G / H, на котором моделируется слоение (M, F), можно взять пространство Де Ситтера, при этом $G = O\left(1,2\right)$, $H \cong O(1,1)$. Если $K_0 = 0$, то положим $N = E_1^2$ – псевдоевклидова плоскость, а G – полная группа изометрий E_1^2, изоморфная полупрямому произведению стационарной подгруппы $H \cong O(1,1)$ и нормальной подгруппы сдвигов $\mathbf{R}^2$. □

4. Доказательство теоремы 4

Напомним определение (G, N)-слоения. Говорят, что группа диффеоморфизмов G действует на N *квазианалитически*, если из существования открытого подмножества U в N и элемента $g \in G$ таких, что $g\big|_U = id_U$, вытекает $g = e$, где e – единица группы G. Пусть G – некоторая группа диффеоморфизмов связного многообразия N, действующая квазианалитически на N. Слоение (M, F), заданное N-коциклом $\xi = \{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}_{i,j\in J}$, называется (G, N)-*слоением*, если при $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, $i, j \in J$, для γ_{ij} существует такой элемент $g \in G$, что $\gamma_{ij} = g\big|_{f_j(U_i \cap U_j)}$.

Пусть (M, F) – трансверсально аналитическое нериманово лоренцево слоение коразмерности два. Согласно теореме 3 слоение (M, F) является трансверсально однородным G/H-слоением или $(G, G/H)$-слоением. Так как по условию (M, F) обладает связностью Эресмана, то (M, F) является $(G, G/H)$-слоением со связностью Эресмана. Поэтому из теоремы 2, доказанной в [6] для (G, N)-слоений, вытекают утверждения теоремы 4. □

5. Пример

Пусть S_p^2 – двумерная сфера с p ручками, $p \geq 1$. Как известно, фундаментальная группа $\pi_1(S_p^2)$ равна

$$G = \left\langle a_1, b_1, \ldots, a_p, b_p \,\middle|\, a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} = 1 \right\rangle.$$

Пусть (T^2, g) – двумерный тор с лоренцевой метрикой g, заданной в стандартном базисе e_1, e_2 матрицей

$$(g_{ij}) = \eta \begin{pmatrix} -2c & a-d \\ a-d & 2b \end{pmatrix},$$

где η – произвольное действительное число, отличное от нуля a, b, c, d – целые числа, удовлетворяющие условиям: $ad - bc = 1$, $a + d > 2$. Как показано в [14, теорема 1], в этом случае полная группа изометрий $H = \mathrm{Iso}(T^2, g)$ некомпактна и содержит элемент ψ, заданный матрицей $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Определим гомоморфизм групп $\rho : G \to \mathit{Diff}(T^2)$, задав его на образующих группы G следующим образом: $\rho(a_1) = \psi$, $\rho(a_i) = id\big|_{T^2}$ $\forall i \in \{2, \ldots, p\}$, $\rho(b_j) = id\big|_{T^2}$ $\forall j \in \{1, \ldots, p\}$. Пусть $k : \mathbf{R}^2 \to S_p^2$ – универсальное накрывающее отображение и $z_0 \in \mathbf{R}^2$. При этом G действует на $\mathbf{R}^2$ как группа накрывающих преобразований и определено действие группы G на цилиндре $\mathbf{R}^2 \times T^2$:

$$\Phi : G \times \mathbf{R}^2 \times T^2 \to \mathbf{R}^2 \times T^2 : (g, (z_1, z_2)) \mapsto (g^{-1}(z_1), \rho(g)(z_2))$$

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2 \times T^2.$$

Поскольку группа накрывающих преобразований действует свободно и собственно разрывно, то действие группы G на $\mathbf{R}^2 \times T^2$ также свободное и собственно разрывное. Следовательно, определено фактор-многообразие $M = \mathbf{R}^2 \times_G T^2$. Так как $\Phi_g(\mathbf{R}^2 \times \{z\}) = \mathbf{R}^2 \times \{\rho(g)(z)\}$ $\forall g \in G$, то Φ сохраняет тривиальное слоение $F_{tr} = \{\mathbf{R}^2 \times \{z\} \mid z \in T^2\}$ произведения $\mathbf{R}^2 \times T^2$. Поэтому на M индуцируется слоение F, слои которого являются образами слоев слоения $(\mathbf{R}^2 \times T^2, F_{tr})$ при фактор-отображении $\widetilde{k} : \mathbf{R}^2 \times T^2 \to M$. Напомним, что (M, F) называется слоением, полученным надстройкой гомоморфизма ρ и обозначается через (M, F).

Подчеркнем, что (M, F) является (H, T^2)-слоением, где H – полная группа Ли изометрий лоренцева тора (T^2, g), изоморфная полупрямому произведению группы $O(1,1)$ и нормальной подгруппы T^2. Таким образом, (M, F) – трансверсально аналитическое лоренцево слоение коразмерности два.

Определено отображение $q : M \to B = S_p^2$, переводящее орбиту $G(z_1, z_2)$ в орбиту Gz_1, которое является локально тривиальным расслоением со стандартным слоем T^2. Слои этого расслоения трансверсальны слоям слоения (M, F). Многообразие M компактно как пространство локально тривиального расслоения над компактной базой S_p^2 и компактным слоем T^2.

Будем рассматривать T^2 как фактор-многообразие $\mathbf{R}^2 / \mathbf{Z}^2$; обозначим через $O \in T^2$ образ нуля $\mathbf{R}^2$ при фактор-отображении $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 / \mathbf{Z}^2 = T^2$. Поскольку $O \in T^2$ – неподвижная точка группы $\Psi = \langle \psi \rangle = \rho(G)$, то слой $L = \tilde{k}(L_0 \times \{O\})$ компактен и диффеоморфен $\mathbf{R}^2 / G = S_p^2$. Согласно утверждению 3 теоремы 4 группа голономии слоя L изоморфна стационарной подгруппе $\Psi_O \cong \Psi \cong \mathbf{Z}$ группы Ψ и по теореме 1 (M, F) – нериманово лоренцево слоение.

Так как ψ – аносовский автоморфизм тора T^2, то, как известно, группа Ψ имеет всюду плотное множество конечных (периодических) орбит в T^2. Следовательно, слоение (M, F) имеет всюду плотное множество компактных слоев. Кроме того, согласно свойству аносовского автоморфизма тора существует всюду плотная орбита группы Ψ, это означает существование всюду плотного слоя слоения (M, F). Таким образом, трансверсально аналитическое двумерное слоение (M, F) является хаотическим.

Библиографический список

1. **Boubel, C.** Lorentzian foliations on 3-manifolds / C. Boubel, P. Mounoud, C. Tarquini // Ergodic Theory Dynam. System. – 2006. – Vol. 26, № 5. – P. 1339–1362.
2. **Blumenthal, R. A.** Ehresmann connections for foliations / R. A. Blumenthal, J. J. Hebda // Indiana Univ. Math. J. – 1984. – Vol. 33, № 4. – P. 597–611.
3. **Wolak, R. A.** Leaves of foliations with transverse G-srtuctures of finite type / R. A. Wolak // Publications Matematiques. – 1989. – Vol. 33. – P. 153–162.

4. **Wolak, R. A.** Foliations admitting transverse systems of differential equations / R. A. Wolak // Compositio Math. – 1988. – Vol. 67. – P. 89–101.
5. **Жукова, Н. И.** График слоения со связностью Эресмана и стабильность слоев / Н. И. Жукова // Известия вузов. Математика. – 1994. – № 2. – 79–81.
6. **Жукова, Н. И.** Глобальные аттракторы полных конформных слоений / Н. И. Жукова // Математический сборник. – 2012. – Т. 203, № 3. – С. 79–106.
7. **Жукова, Н. И.** Аттракторы слоений с трансверсальной параболической геометрией ранга один / Н. И. Жукова // Математические заметки. – 2013. – Т. 93, № 6. – С. 944–946.
8. **Жукова, Н. И.** Минимальные множества картановых слоений / Н. И. Жукова // Труды математического института им. В. А. Стеклова. – 2007. – Т. 256. – С. 115–147.
9. **Candel, A.** Foliations I. Graduate Studies in Mathematics, 23 / A. Candel, L. Conlon. – American Mathematical Society, Providence, RI. – 2000. – Vol. 23. – 402 p.
10. **Zhukova, N.** On the stability of leaves of Riemannian foliation / N. Zhukova // Ann. Global Anal. and Geom. – 1987. – Vol. 5, № 3. – P. 261–271.
11. **Blumenthal, R.** Transversely homogeneous foliations / R. Blumenthal // Ann. Institut Fourier. – 1979. – Vol. 29. – P. 143–158.
12. **Жукова, Н. И.** Геометрия слоений со связностями : дис. … д-ра физ.-мат. наук : 01.01.04 / Жукова Н. И. – Казань, 2014. – 279 с.
13. **Nomizu, K.** Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. J. Math. – 1954. – Vol. 76. – P. 3–65.
14. **Жукова, Н. И.** Классификация компактных лоренцевых 2-орбифолдов с некомпактной полной группой изометрий / Н. И. Жукова, Е. А. Рогожина // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53, № 6. – С. 1292–1309.

References

1. Boubel C., Mounoud P., Tarquini C. *Ergodic Theory Dynam. System*. 2006, vol. 26, no. 5, pp. 1339–1362.
2. Blumenthal R. A., Hebda J. J. *Indiana Univ. Math. J.* 1984, vol. 33, no. 4, pp. 597–611.
3. Wolak R. A. *Publications Matematiques*. 1989, vol. 33, pp. 153–162.
4. Wolak R. A. *Compositio Math*. 1988, vol. 67, pp. 89–101.
5. Zhukova N. I. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1994, no. 2, 79–81.
6. Zhukova N. I. *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical collection]. 2012, vol. 203, no. 3, pp. 79–106.
7. Zhukova N. I. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 2013, vol. 93, no. 6, pp. 944–946.
8. Zhukova N. I. *Trudy matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova* [Proceedings of Steklov Mathematical Institute]. 2007, vol. 256, pp. 115–147.
9. Candel A., Conlon L. *Foliations I. Graduate Studies in Mathematics, 23*. American Mathematical Society, Providence, RI. 2000, vol. 23, 402 p.
10. Zhukova N. *Ann. Global Anal. and Geom*. 1987, vol. 5, no. 3, pp. 261–271.
11. Blumenthal R. *Ann. Institut Fourier*. 1979, vol. 29, pp. 143–158.
12. Zhukova N. I. *Geometriya sloeniy so svyaznostyami: dis. d-ra fiz.-mat. nauk: 01.01.04* [Geometry of foliations with connections: dissertation to apply for the degree of the doctor of physical and mathematical sciences]. Kazan, 2014, 279 p.
13. Nomizu K. *Amer. J. Math*. 1954, vol. 76, pp. 3–65.
14. Zhukova N. I., Rogozhina E. A. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian mathematical journal]. 2012, vol. 53, no. 6, pp. 1292–1309.

Багаев Андрей Владимирович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет имени Р. Е. Алексеева (Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24)

E-mail: a.v.bagaev@gmail.com

Bagaev Andrey Vladimirovich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of applied mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev (24 Minina street, Nizhny Novgorod, Russia)

Жукова Нина Ивановна
доктор физико-математических наук, доцент, кафедра фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12)

E-mail: nina.i.zhukova@yandex.ru

Zhukova Nina Ivanovna
Doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of fundamental mathematics, National Research University “Higher School of Economics” (25/12 Bolshaya Pecherskaya street, Nizhny Novgorod, Russia)

УДК 514.7

Багаев, А. В.

Трансверсально аналитические лоренцевы слоения коразмерности два / А. В. Багаев, Н. И. Жукова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 4 (44). – С. 33–45. DOI 10.21685/2072-3040-2017-4-3